Tutorato 2 GE220

DOCENTE: MASSIMILIANO PONTECORVO. ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE.
TUTORI: GIOVANNI PASSERI. BRUNO RENZI.
GIOVEDÌ 8 MARZO 2018.

Esercizio 1. 1. *Verificare che se X è un insieme non vuoto con la topologia banale, tutte le successioni a valori in X convergono a tutti i punti di X.*

2. *Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia che ha per base*

$$\{[a,b] : b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}\}$$

se la successione $x_n = x$ converge e se sì dire a cosa.

3. *Dire se la successione a valori in $\mathbb{R}$ $x_n = \frac{1}{n}$ converge se su $\mathbb{R}$ si mette la topologia euclidea e quella cofinita.*

Esercizio 2. *Consideriamo $\mathbb{R}$, con la topologia*

$$S_- := \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

1. *Verificare che*

$$\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

è base di una topologia, S ($\mathbb{R}$ con questa topologia si dice detta "Retta di Sorgenfrey"); è confrontabile con S_-?

2. *Consideriamo*

$$S_+ := \{(x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$$

Mostrare che $(\mathbb{R}, S_-)$, $(\mathbb{R}, S_+)$ sono omeomorfi.

3. *Sia $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo la successione $x_n := x - n^{(-1)^n}$ ed $x'_n := x + (-1)^{n+1} n^{(-1)^n}$ Convergono ad x in $(\mathbb{R}, S_-)$?*

4. *Mostrare che una successione x_n converge ad un numero reale x in $(\mathbb{R}, S_-) \iff \limsup_{n\to\infty} x_n \leq x$*

Esercizio 3. *Considerare $X := \mathbb{R}$ con la topologia cofinita.*

1. *Trovare punti interni, esterni e di frontiera di $(0,1)$.*

2. *Ripetere l'esercizio precedente con $[0,1]$.*

3. *X è di Hausdorff?*

4. *Mostrare che ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in X, converge ad un punto $x \in X$ se e solo se $\forall s \in X - \{x\}$, $x_n \neq s$ definitivamente.*

5. *Mostrare che se invece della topologia cofinita mettiamo su $\mathbb{R}$ la topologia conumerabile, nessuno successione ammette limite.*

Esercizio 4. *Mostrare che i seguenti spazi topologici X, Y sono omeomorfi.*

1. $$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$
$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

2. $$X := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(0, 0)\}$$
$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Esercizio 5. *Sia X uno spazio topologico, mostrare che*

1. *$D \subset X$ è denso $\iff$ D interseca tutti gli aperti di X*

2. *Se x_n è una successione a valori nel piano reale, $\mathbb{R}^2 - \{x_n : n \geq 1\}$ è denso in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea.*

3. *Usando il primo punto che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.*

Esercizio 6. *Sia X uno spazio topologico, $S \subset X$, mostrare che*

1. *$X = IntS \cup FrS \cup EstS$, dove l'unione è disgiunta*

2. *χ_S è continua in $x \in X$ $\iff$ $x \notin FrS$, dove*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$